

PRIMAL PROGRAM LINEAR MENGGUNAKAN ALGORITMA INTERIOR POINT DAN METODE SIMPLEX

Rusdy Agustaf

Jurusan Teknik Informatika Fakultas Teknik Universitas Janabadra Yogyakarta
Jl. Tentara Rakyat Mataram 55-57 Yogyakarta 55231 Telp/Fax (0274) 543676

ABSTRACT

Primal linear programming in of section by operation reseach, "The obyective of Interior Point algoritm and Simplex Methods to make Solution in primal linear programing", simplex method could be formulated to be interior point algoritm linear programing with MatLab basic program to get optimal solution of linear programing obyektif function.

Analysis of interior point algoritm by Narendra Karmarkar (1984) from AT. ET. Bell are used interior point choice in feasible region, alpha criteria and primal-dual of linear programing.

This study interior point algoritm in primal linear programing solution also makes to simplex method by George Dantzig (1947) solution in linear programing.

Interior point algoritm in primal linear programing solution the fastest five hundred of Simplex method, this news the best of The New York Times¹.

Keywords : Interior Point, Alpha Criteria, Simplex , Primal linear programing

PENDAHULUAN

Perkembangan perusahaan pada Era Globalisasi mengalami pertumbuhan sangat pesat, berkembang cepat menjadi perusahaan besar, permasalahan pada perusahaan itu tentu semakin besar pula, perlu pengelolaan secara profesional, tujuan akhir untuk memperoleh keuntungan/profit sebesar-besarnya (maksimum) dengan biaya pembuatan (produksi) serendah-rendahnya (minimum), tujuan akhir inilah yang menyebabkan muncul persoalan optimalisasi, ini merupakan persoalan riset operasi (operation research).

Teknologi komputer sangat berperan didalam menyelesaikan berbagai macam masalah yang ada pada riset operasi (operations research). Algoritma interior point yang dirancang/ dikemukakan oleh Narendra Karmarkar (1984) dari AT. ET. Bell bisa memberikan solusi primal program linear. Penyelesaian masalah primal program linear sudah dikembangkan oleh George Dantzig (1947)¹ dengan menggunakan metode simplex, memakai tabel simplex dengan perulangan/ iterasi, perlu banyak langkah dan ketelitian tinggi, Algoritma interior point menggunakan software MatLab bisa menyelesaikan masalah primal program linear 50 kali lebih cepat dari

metode simplex, dan menjadi berita utama pada majalah The New York Times (Hillier, dkk.,1994)

Beberapa masalah yang ingin diperoleh dari penelitian ini, perlu dirumuskan masalah- nya, agar topik " Primal Program Linear Menggunakan Algoritma Interior Point Dan Metode Simplex " dapat menghasilkan sesuatu yang lebih bermakna, yaitu :

1. Menggunakan algoritma interior point, software MatLab untuk menyelesaikan primal program linear dengan cara : Menentukan titik interior point, menentukan pengambilan nilai α diantara 0 dan 1 dimana α merupakan konstanta sebagai ukuran untuk menggerak titik didalam daerah fisibel hingga ketitik optimal yang diinginkan dimana $0 < \alpha < 1$).
2. Menggunakan tabel simplex untuk penyelesaian primal program linear secara manual.
3. Hasil dari algoritma interior point dibandingkan dengan metode simplex.

Permasalahan yang dibicarakan khusus dibatasi primal program linear, bilangan pada

daerah fisibel yang digunakan bilangan real, algoritma interior point dirancang dengan software berbasis MatLab release 5.3, metode simplex secara manual pakai tabel simplex.

Program Linear adalah persoalan mencari maksimum/ minimum suatu fungsi objektif, memenuhi kendala (konstrain). Solusi persoalan primal program linear yaitu :

Mencari $x_j \geq 0$, memenuhi $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (=) b_i$,

$i=1,2,3,\dots,n$, meng-optimalkan fungsi objektif F

$$= \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Algoritma Interior Point

Algoritma interior point dikemukakan Narendra Karmarkar mendasari penelitian ini, merupakan suatu metode menyelesaikan primal program linear untuk mengoptimalkan fungsi obyektif $Z = c^T x$ dengan kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$ dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Pilih titik interior point

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

berikut tentukan matriks diagonal D

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & & & 0 \\ 0 & & x_3 & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & x_n \end{bmatrix}$$

2. Tentukan $\bar{A} = AD$ dan $\bar{c} = D \cdot c$
3. Tentukan matriks proyeksi $P = I - A^T (AA^T)^{-1} A$
4. Tentukan projected gradient : $c_p = P \cdot C$ dan $v = |c_p|$ = absolut komponen negatif terbesar dari c_p
5. Tentukan dengan iterasi koordinat titik baru

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{v} \cdot c_p$$

Demikian seterusnya pengambilan titik interior x dimana $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ didalam daerah fesibel, dilakukan dengan menggunakan iterasi, dan dari proses iterasi dapat diperoleh titik yang layak dari x untuk menentukan nilai optimal fungsi obyektif, sehingga dengan

metode algoritma titik interior point ini dapat menghasilkan nilai yang menuju ke-nilai optimal (maksimal/minimal).

Metode Simplex

Penyelesaian dengan menggunakan metode Simplex dapat dilakukan sebagai berikut :

1. Merubah bentuk fungsi Obyek (sasaran) menjadi bentuk implisit.
2. Menyusun dalam table, menentukan kolom kunci yaitu dipilih pada baris fungsi obyek yang bernilai negatif terbesar, bila baris fungsi obyek tidak mempunyai nilai negatif maka tabel tidak bisa dioptimalkan lagi berarti sudah optimal
3. Memilih baris kunci terkecil dari indeks tiap-tiap baris,

$$\text{Indeks} = \frac{\text{Nilai kolom NK}}{\text{Nilai kolom kunci}}$$

Dipilih baris yang indeks positif dengan angka terkecil, perpotongan baris kolom dan baris kunci dijadikan elemen kunci 1, baris elemen lain pada kolom kunci harus dinolkan

4. Merubah nilai-nilai pada baris kunci, dan merubah nilai-nilai pada kolom kunci.
5. Demikian seterusnya secara manual kembali ke nomor 2 hingga diperoleh hasil optimal.

METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan penulis dengan menggunakan metode sebagai berikut :

1. Penelitian Literatur dilakukan dengan mencari sumber teori, informasi dari literatur yang ada dipustaka, atau dari situs-situs pada internet/ sumber-sumber lain yang benar.
2. Penelitian penyelesaian masalah primal program linear menggunakan penelitian algoritma interior point dari Narendra Karmarkar (1984) dari AT. ET. Bell, program dirancang sendiri berbasis MatLab, kemudian penyelesaian masalah primal program linear sudah dikembangkan oleh George Dantzig (1947) yaitu metode simplex dengan menggunakan / memakai tabel simplex untuk menyelesaikan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian pada " Primal Program Linear Menggunakan Algoritma Interior Point Dan Metode Simplex " dilakukan dengan cara menyelesaikan primal program linier dengan menggunakan metode Algoritma interior point oleh Narendra Karmarkar diteliti, kemudian Primal Program Linear diselesaikan dengan menggunakan Metode Simplex oleh George Dantzig,

Penelitian ini dilakukan dengan :
meneliti, mempelajari teorema, definisi, metode yang digunakan, digunakan algoritma interior point dengan program berbasis MatLab dengan cara :

Pemilihan titik awal , penentuan nilai α dan menentukan banyak iterasi yang diinginkan

Hasil Penelitian dari "Penyelesaian Primal Program Linear Menggunakan Algoritma Interior Point Lebih Efektif Dari Metode Simplex" diperoleh hasil sebagai berikut :

Penyelesaian primal program linear dengan algoritma interior point yang dikemukakan Narendra Karmarkar mendasari penelitian ini, merupakan suatu metode mengoptimalkan fungsi obyektif $Z = c^T x$, kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$ dengan algoritma interior point perlu hal-hal berikut :

Perlu ditambah slack variabel, fungsi obyektif $Z = c^T x$ jadi $Z' = (c^T)x'$, kendala $Ax \leq b$ jadi $A'x' = b'$, sehingga program bisa dimasukkan/ dientri data fungsi obyektif dan kendala, kedalam bentuk matriks, dimana $C = (c^T)$, $B = b'$, $A = A'$ dan $X = x'$, pilih titik interior awal yang memenuhi $A'x' = b'$, pemilihan titik interior secara acak, tentukan nilai α ($0 < \alpha < 1$), α sebagai penggerak titik interior sebelum keluar dari daerah fisibel menuju ketitik optimal dan titik berada pada daerah fisibel.

Dibuat program berbasis software MatLab, solusi primal diperoleh dengan mengentri data.

Program Algoritma Interior Point sebagai berikut :

```
disp('=====');
disp('Program Interior Point');
disp('Program ini untuk memperoleh Nilai Optimal');
disp('Nilai Optimal dari Fungsi Objective pada Primal Program Linier');
disp('=====');
C = input('Nilai C = ');
B = input('Nilai B = ');
```

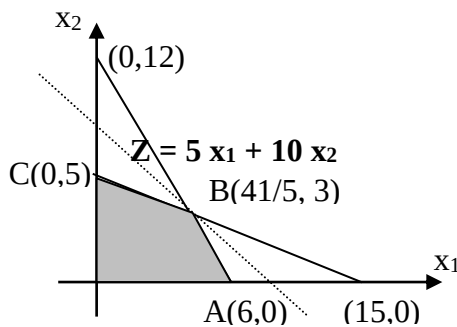
```
A = input('Nilai A = ');
X = input('Nilai X = ');
alpha = input('Nilai alpha = ');
iterasi = input('Iterasi yang diinginkan = ');
deteksi = 0;
for i = 1 : size(B,1)
    tampung=0;
    for j = 1 : size(X,2)
        tampung=tampung+(A(i,j)*X(1,j));
    end
    if tampung > B(i,1)
        deteksi = 1;
        break;
    end
end
if deteksi == 0
    disp('terpenuhi');
    for i = 1 : iterasi
        fprintf('iterasi ke - %.1g',i);
        for j = 1 : size(X,2)
            D(j,j) = X(1,j);
            SI(j,1) = 1;
        end
        K = A * D;
        TK = K';
        L = K * TK;
        M = inv(L);
        N = TK * M * K;
        P = eye(size(X,2)) - N;
        Cp = P * C;
        cek = 0;
        for q = 1 : size(X,2)
            if Cp(q,1)<cek;
                cek = Cp(q,1);
            end
        end
        v = abs(cek);
        Y = SI + ((alpha / v) * Cp);
        W = D * Y;
        X = W';
        X
        Z=X*C
    end
else
    disp('tdk terpenuhi');
end
```

Menggunakan Algoritma Interior Point

Diketahui Primal Program Linear,
Memaksimum fungsi obyektif
 $Z = 5x_1 + 10x_2$
dengan

$$\text{Kendala : } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

digunakan algoritma Interior Point dengan menggunakan program MatLab release 5.3 Secara Grafik



algoritma interior point diberi slack variabel, menjadi Maksimum : $Z = 5x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\text{Kendala : } \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 12 \\ 1x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 15 \end{cases}$$

Gunakan program primal berbasis MatLab, fungsi obyektif $Z' = (c^T)x'$, kendala $A'x' = b'$, dari contoh diatas:

$C = (c^T)' = [5; 10; 0; 0]$, $B = b' = [12; 15]$ dan $A = A' = [2 \ 1 \ 1 \ 0; 1 \ 3 \ 0 \ 1]$, pilih sebarang titik interior (2,2,6,7) ditulis $X = [2 \ 2 \ 6 \ 7]$ memenuhi $A'x' = b'$.

Selanjutnya tentukan nilai α ($0 < \alpha < 1$), dan diambil iterasi 20 kali, maka dengan program algoritma interior point, akan diperoleh hasil berupa nilai optimal fungsi obyektif :

» Interior

```
=====
Program Algoritma Interior Point
Program ini untuk memperoleh Nilai Optimal
Nilai Optimal dari Fungsi Objective pada
Primal Program Linier
```

Nilai C = [5;10;0;0]

Nilai B = [12;15]

Nilai A = [2 1 1 0; 1 3 0 1]

Nilai X = [2 2 6 7]

Terpenuhi

Nilai Z = 57.00

Pada Alpha ke - 0.9 dan iterasi ke - 19

Gunakan program algoritma interior point dengan menggunakan program MatLab release 5.3, diadakan penelitian dengan mengambil secara acak titik interior point yang berada didaerah fisibel, lihat 8 titik interior memenuhi $A'x' = b'$, seperti berikut :

Primal program linear menggunakan Algoritma Interior Point, dilakukan penelitian sebagai dengan menggunakan MatLab berikut :

1. Diambil titik interior point (2,2,6,7) dimasukkan pada MatLab menjadi [2 2 6 7] masukkan kedalam Program MatLab dengan $\alpha = 0.9$, banyak iterasi 19, diperoleh nilai $z = 57.0011$
2. Diambil titik interior point (2,3,5,4) dimasukkan pada MatLab menjadi [2 3 5 4] masukkan kedalam Program MatLab dengan $\alpha = 0.9$, banyak iterasi 17, diperoleh nilai $z = 57.0001$
3. Diambil titik interior point (2,4,4,1) dimasukkan pada MatLab menjadi [2 4 4 1] masukkan kedalam Program MatLab dengan $\alpha = 0.9$, banyak iterasi 20, diperoleh nilai $z = 57.0187$
4. Diambil titik interior point (3,3,3,3) dimasukkan pada MatLab menjadi [3 3 3 3] masukkan kedalam Program MatLab dengan $\alpha = 0.9$, banyak iterasi 20, diperoleh nilai $z = 57.0087$
5. Diambil titik interior point (3,4,2,0) dimasukkan pada MatLab menjadi [3 4 2 0] masukkan kedalam Program MatLab dengan $\alpha = 0.9$, banyak iterasi 13, diperoleh nilai $z = 57.2849$
6. Diambil titik interior point (4,1,3,8) dimasukkan pada MatLab menjadi [4 1 3 8] masukkan kedalam Program MatLab dengan $\alpha = 0.9$, banyak iterasi 19, diperoleh nilai $z = 57.0029$
7. Diambil titik interior point (4,2,2,5) dimasukkan pada MatLab menjadi [4 2 2 5] masukkan kedalam Program MatLab dengan $\alpha = 0.9$, banyak iterasi 19, diperoleh nilai $z = 57.0034$
8. Diambil titik interior point (4,3,1,2) dimasukkan pada MatLab menjadi [4 3 1 2] masukkan kedalam Program MatLab dengan $\alpha = 0.9$, banyak iterasi 20, diperoleh nilai $z = 57.0075$

Hasil penelitian terlihat nilai optimal fungsi obyektif mendekati nilai yang sama. Umumnya diperoleh nilai optimal bila titik berada didaerah feasible, nilai α

menghasilkan nilai optimal, lebih baik untuk nilai $\alpha \geq 0.5$, untuk nilai $\alpha < 0.25$ tidak menghasilkan nilai optimal, dan banyak iterasi yang dilakukan meningkatkan nilai optimal. Tujuan penelitian nilai optimal tercapai sama, titik interior harus berada didaerah feasible, dan α yang digunakan sebaiknya $0.5 \leq \alpha < 1$.

Primal program linear menggunakan metode simplex, dapat berupa : Maksimum $Z = c^T x$ kendala $Ax \leq b$ dan $x \geq 0$, kendala $Ax \leq b$ dirubah menjadi $A'x' = b'$ dengan cara ditambah slack variabel. Solusi primal program linear diperlihatkan berikut menggunakan metode simplex.

Primal Program Linear

Maksimum fungsi objektif $Z = 5x_1 + 10x_2$

Kendala:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Metode Simplex :

Maksimum fungsi obyektif :

$$Z - 5x_1 - 10x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

Kendala :

$$2x_1 + 1x_2 + 1s_1 + 0s_2 = 12$$

$$1x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 1s_2 = 15$$

Tabel Simplex :

Variabel Dasar	x_1	x_2	s_1	s_2	N K	Indek
Z	-5	-10	0	0	0	
s_1	2	1	1	0	12	12/1
s_2	1	3	0	1	15	15/3
Z	-5/3	0	0	5/3	50	
s_1	5/3	0	1	-1/3	7	21/5
x_2	1/3	1	0	1/3	5	15
Z	0	0	1	4/3	57	
x_1	1	0	3/5	-1/5	4.2	
x_2	0	1	-1/5	6/15	3.6	

Metode simplex berhenti bila elemen-elemen dari Z tidak ada yang bernilai negatif, maka penyelesaian primal program linear dengan metode simplex yaitu :

Nilai maksimum fungsi obyektif = 57

untuk $x_1 = 4.2$ dan $x_2 = 3.6$

KESIMPULAN

Hasil penelitian mengenai "Primal Program Linear Menggunakan Algoritma Interior Point Dan Metode Simplex" telah dibicarakan diatas, maka dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut :

1. Hasil penelitian terlihat nilai optimal fungsi obyektif mendekati nilai yang sama bila menggunakan metode simplex. Umumnya nilai optimal bila titik berada didaerah feasible, nilai α menghasilkan nilai optimal, baik untuk $\alpha \geq 0.5$, nilai $\alpha < 0.25$ tidak menghasilkan nilai optimal, dan melakukan iterasi yang banyak untuk meningkatkan nilai optimal.
2. Penyelesaian primal program linear secara manual memakai tabel simplex beserta ketentuan yang ada pada metode simplex, diperoleh nilai optimal (maksimal / minimal).
3. Solusi primal program linear dengan menggunakan algoritma interior point, dengan nilai $\alpha \geq 0.5$ dan iterasi lebih banyak menghasilkan nilai fungsi obyek mendekati nilai optimal, sedangkan secara manual solusi metode simplex, nilai optimal fungsi obyektif diperoleh lebih eksak, prosesnya lebih rumit, statis, memakai iterasi dan tabel simplex. Untuk persamaan relatif sedikit, metoda simplex lebih baik dari algoritma interior point, tetapi untuk persamaan yang banyak variabel maka algoritma interior point lebih baik karena titik interior, iterasi, nilai α bisa diatur/ direkayasa, hingga solusinya lebih cepat.

Lampiran Hasil / Output Program

Program Interior Point

Program ini untuk memperoleh Nilai Optimal Nilai Optimal dari Fungsi Objective pada Primal Program Linier

Nilai C = [5;10;0;0]

Nilai B = [12;15]

Nilai A = [2 1 1 0; 1 3 0 1]

Nilai X = [2 2 6 7]

Nilai alpha = 0.9

Iterasi yang diinginkan = 19
terpenuhi

iterasi ke - 1

X =
2.6626 3.8791 2.7956 0.7000
Z =
52.1044

iterasi ke - 2

X =
4.1198 3.4808 0.2796 0.4378
Z =
55.4069

iterasi ke - 3

X =
4.0576 3.6329 0.2519 0.0438
Z =
56.6168

iterasi ke - 4

X =
4.1874 3.5999 0.0252 0.0127
Z =
56.9366

iterasi ke - 5

X =
4.1901 3.6029 0.0169 0.0013
Z =
56.9793

iterasi ke - 6

X =
4.1991 3.6000 0.0017 0.0008
Z =
56.9959

iterasi ke - 7

X =
4.1994 3.6002 0.0011 0.0001
Z =
56.9986

iterasi ke - 8

X =
4.1999 3.6000 0.0001 0.0001
Z =
56.9997

iterasi ke - 9

X =
4.2000 3.6000 0.0001 0.0000
Z =
56.9999

iterasi ke - 10

X =
4.2000 3.6000 0.0000 0.0000
Z =
57.0000

iterasi ke - 11

X =
4.2000 3.6000 0.0000 0.0000
Z =
57.0000

iterasi ke - 12

X =
4.2000 3.6000 0.0000 0.0000
Z =
57.0000

iterasi ke - 13

X =
4.2000 3.6000 0.0000 0.0000
Z =
57.0000

iterasi ke - 14

X =
4.2000 3.6000 0.0000 0.0000
Z =
57.0000

iterasi ke - 15

X =
4.2000 3.6000 0.0000 0.0000
Z =
57.0000

iterasi ke - 16

X =
4.2000 3.6000 0.0000 0.0000
Z =
57.0000

iterasi ke - 17

X =

4.2000 3.6000 0.0000 0.0000

Z =

57.0001

iterasi ke - 18

X =

4.2000 3.6000 0.0000 0.0000

Z =

57.0004

iterasi ke - 19

X =

4.2002 3.6000 0.0000 0.0000

Z =

57.0011

DAFTAR PUSTAKA

- Hillier, Frederick S Gerald J. Lieberman, 1994 , **Introduction to Operation Research** , McGraw-Hill Publishing Company; New York.
- Gondzio, J., dan Tamas T., 1994, **A Computational View of Interior Point Methods for Linear Programming**"; University of Geneva 102 Bd Carlvogt, CH-1211 Geneva 4, Switzerland; Delft University of Technology, PO BOX 5031, 2600 GA Delft; The Netherlands, internet E-mail: gondzio@divsum.unige.ch; t.terlaky@twi.tudelft.nl.
- Roos, K., Tamas Terlaky; Jean-Philippe Vial., 2001, **Theory and Algorithms for Linear Optimization An Interior Point Approach**, <<http://www.rpi.edu/mitchi>> Accessed by June 2001.
- Potra, Florian A.; Ronggin Sheng., 2001., **A Superlinearly Convergent Primal-Dual Infeasible-Interior-Point Algorithm For Semidefinite Programming**, The University of Iowa; USA.
- Subanar, 2001, **Riset Teori**, FMIPA-UGM, Yogyakarta.